УДК 514.126

А. И. Долгарев, Е. И. Рябова

КРИВЫЕ В ГАЛИЛЕЕВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С 3-МЕРНЫМ V-РАСТРАНОМ

Аннотация. Определен растран еще одного вида – 3-мерный $\mathbf{V}$-растран, введено галилеево скалярное произведение на $\mathbf{V}$-растране. Как и другие геометрии пространств с растраном, геометрия одулярного галилеева пространства с $\mathbf{V}$-растраном некоммутативна. Для кривых определены кривизна и кручение, получены натуральные уравнения. Составлена система обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициентами которой являются заданные функции кривизны и кручения кривой, а решением являются компоненты растранных функций, описывающих кривые с заданными функциями кривизны и кручения.

Ключевые слова: натуральное уравнение кривой в некоммутативном галилеевом пространстве.

Abstract. Arrays in 3-dimensional noncommutative Galilean space with $\mathbf{V}$-array are examined. $\mathbf{V}$-rastran is a direct sum of 2-dimensional rastran and 1-dimensional vector space. Definition of curved rastran function was received according to line natural equation.

Keywords: line natural equation in noncommutative Galilean space.

Действительные растраны относятся к разрешимым одулям Ли, которые введены в [1, с. 102–112]. Одули Ли обобщают действительные линейные пространства и являются частным случаем одулей над кольцом [2]. В работе [1] изучаются некоммутативные геометрии вейлевских одулярных пространств размерности 3 – пространств с одулями Ли, построенными в схеме Г. Вейля; в том числе геометрия пространства с однородным растраном. Начальные сведения по геометрии пространства с растраном общего вида содержатся в [3]. Ниже определен растран еще одного вида – 3-мерный $\mathbf{V}$-растран и начато изучение геометрии пространства с этим растраном. Определено галилеево скалярное произведение на $\mathbf{V}$-растране. Найдены производные соответствующих растранных функций, что позволило изучать дифференциальную геометрию одулярного галилеева пространства с $\mathbf{V}$-растраном. Как и другие геометрии пространств с растраном [1, 3], эта геометрия некоммутативна. Для кривых введена естественная параметризация, определены кривизна и кручение, получены формулы Френе и натуральные уравнения. Составлена система обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициентами которой являются заданные функции кривизны и кручения кривой, а решением являются компоненты растранных функций, описывающих кривые с заданными функциями кривизны и кручения.

1 Растранные функции

1.1 V*-растран*

Существует несколько видов 3-мерных растранов, в [1, с. 106–107] рассмотрены растран общего вида и однородный растран, заданные операциями на тройках $\mathbf{R}^3$ действительных чисел. Ниже рассматривается растран, являющийся прямой суммой 2-мерного растрана и 1-мерного линейного пространства, называемый $\mathbf{V}$-растраном. Обозначение $\mathbf{V}$-растрана: $P_v^3 = \left(\mathbf{R}^3, +, \omega_R(+)\right)$. На многообразии $\mathbf{R^3}$ этот растран определяется следующими операциями на тройках действительных чисел:

$$(x, x^1, x^2) + \left(y, y^1, y^2\right) = \left(x + y, x^1 + y^1, x^2 e^y + y^2\right); \tag{1}$$

$$t\left(x, x^1, x^2\right) = \left(tx, tx^1, x^2 \frac{e^{xt} - 1}{e^x - 1}\right),\ x \neq 0;\ t\left(0, x^1, x^2\right) = \left(0, tx^1, tx^2\right). \tag{2}$$

Элементы растранов называются *растами* и обозначаются малыми греческими буквами, $\rho = \left(x, x^1, x^2\right)$ – произвольный раст. Внешнюю операцию умножения растов на действительные числа принято обозначать $\omega_R(t)$, т.к. она связана с внутренней операцией сложения на растране. Раст $\vartheta = (0, 0, 0)$ является *нулевым*. Действительно, на основании сложения растов (1)

$$\vartheta + \rho = (0, 0, 0) + \left(x, x^1, x^2\right) = \left(0 + x, 0 + x^1, 0 + x^2\right) = \left(x, x^1, x^2\right).$$

Противоположным к расту $\rho = \left(x, x^1, x^2\right)$ является раст

$$-\rho = -(x, x^1, x^2) = \left(-x, -x^1, -x^2 e^{-x}\right), \tag{3}$$

т.к. по (1): $\left(x, x^1, x^2\right) + \left(-x, -x^1, -x^2 e^{-x}\right) = (0, 0, 0)$. Кроме того, используя внешнюю операцию (2), получаем $(-1)\left(x, x^1, x^2\right) = \left(-x, -x^1, -xe^{-x}\right)$.

Расты вида $\rho = \left(0, x^1, x^2\right)$ называются *трансляциями*, расты $\rho = \left(x, x^1, x^2\right)$, где $x \neq 0$, называются *расширениями*. По (1) и (2) получаем, что трансляции составляют в $\mathbf{P_v^3}$ 2-мерное линейное пространство $\mathbf{L}^2$, расширения вида $\gamma = (x, 0, 0)$ составляют в растране $\mathbf{P_v^3}$ 1-мерное линейное пространство.

1.2 Генетический код $\mathbf{V}$*-растрана*

Всякий раст $\rho = \left(x, x^1, x^2\right)$ однозначно представляется в виде суммы, см. (1) и (2):

$$\rho = \left(x, x^1, x^2\right) = x(1, 0, 0) + x^1(0, 1, 0) + x^2(0, 0, 1).$$

Введем обозначения: $(1, 0, 0) = \alpha$, $(0, 1, 0) = \beta$, $(0, 0, 1) = \gamma$. Тогда рассматриваемое разложение имеет вид

$$\rho = \left(x, x^1, x^2\right) = x\alpha + x^1\beta + x^2\gamma.$$

Следовательно, расты α, β, γ составляют *базис* $\mathbf{V}$-растрана $\mathbf{P_v^3}$, который обозначаем $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Коммутатор растов ω, υ, как коммутатор элементов группы $(\mathbf{P_v^3}, +)$, равен $[\omega, \upsilon] = -\omega - \upsilon + \omega + \upsilon$. По (3) находим: $-\alpha = (-1, 0, 0)$, $-\beta = (0, -1, 0)$, $-\gamma = (0, 0, -1)$. Используя операцию (1), вычислим коммутаторы базисных растов.

$$[\gamma, \beta] = -\gamma - \beta + \gamma + \beta = (0, 0, -1) + (0, -1, 0) + (0, 0, 1) + (0, 1, 0) = (0, 0, 0) = \vartheta;$$

$$[\gamma, \alpha] = (0, 0, e-1) = (e-1)\gamma, \ [\beta, \alpha] = \vartheta.$$

Теперь запишем генетический код $\mathbf{V}$-растрана:

$$P_v^3 = \left\langle \alpha, \beta, \gamma \middle| [\beta, \alpha] = \vartheta; [\gamma, \beta] = \vartheta; [\gamma, \alpha] = (e-)\gamma \right\rangle.$$

На основе генетического кода $\mathbf{V}$-растрана заключаем, что $\mathbf{V}$-растран является прямой суммой 2-мерного растрана $\mathbf{P^2}$ и 1-мерного линейного пространства $\mathbf{L^1}$:

$$\mathbf{P_v^3} = \mathbf{P^2} + \mathbf{L^1},$$

где $\mathbf{P^2}$ состоит из растов вида $\left(x, 0, x^2\right)$, $\mathbf{L^1}$ состоит из растов вида $\left(0, x^1, 0\right)$. Определение растрана $\mathbf{P^2}$ см. в [1].

1.3 Норма на растране

Обычным образом, как в линейном пространстве [1, с. 46–48], определим галилееву норму растов.

Галилеево скалярное произведение растов $\rho = \left(x, x^1, x^2\right)$, $\sigma = \left(y, y^1, y^2\right)$ обозначается $\rho\sigma$ и задается следующим образом:

$$\rho\sigma = \begin{cases} xy, \text{ если } x \neq 0 \text{ или } y \neq 0, \\ x^1 y^1 + x^2 y^2, \text{ если } x = y = 0. \end{cases}$$

Скалярным квадратом раста ρ называется число $\rho\rho = \rho^2$. По определению скалярного произведения растов имеем

$$\rho^2 = \begin{cases} (x)^2, \text{ если } x \neq 0, \\ (x^1)^2 + (x^2)^2, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Выполняются следующие свойства: скалярный квадрат раста ρ равен нулю, если и только если $\rho = \vartheta$; для всякого раста $\rho : \rho^2 \geq 0$.

Нормой раста называется корень квадратный из его скалярного квадрата: $\|\rho\| = \sqrt{\rho^2}$. Для раста $\rho = \left(x, x^1, x^2\right)$ имеем

$$|\rho| = \begin{cases} |x|, \text{ если } x \neq 0, \\ \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Расты $\rho = (x, 0, 0)$ называются *времениподобными*, или *временными*, расты $\rho = \left(0, x^1, x^2\right)$ называются *пространственноподобными*, или *пространственными*. Все временные расты являются расширениями. Всякая трансляция пространственна, согласно определению нормы раста, она является евклидовым вектором. Скалярные произведения различных растов базиса равны нулю, скалярные квадраты этих растов равны 1. Поэтому базис **Б** является ортонормированным. Трансляции составляют в $\mathbf{P}_\mathbf{V}^\mathbf{3}$ 2-мерное евклидово векторное пространство $\mathbf{V}^2$.

1.4 Дифференцирование растранной функции

Пусть $x(t), x^1(t), x^2(t)$ – действительные функции действительного параметра t, заданные на общем интервале $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$. Рассмотрим функцию

$$\rho(t) = \left(x(t), x^1(t), x^2(t)\right), t \in \mathbf{I},$$

со значениями на $\mathbf{P}_\mathbf{V}^\mathbf{3}$: всякому значению t из $\mathbf{I}$ соответствует раст $\rho(t) = \left(x(t), x^1(t), x^2(t)\right)$ из $\mathbf{P}_\mathbf{V}^\mathbf{3}$. С изменением параметра t имеем растранную функцию $\rho(t)$ параметра t.

Раст $\eta = \left(h, h^1, h^2\right)$ называется *пределом функции* $\rho(t) = \left(x(t), x^1(t), x^2(t)\right)$, $t \in \mathbf{I}$ в точке t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} x^i(t) = h^i$, $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = h, i = 1, 2$. Функция $\rho(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если предел функции в точке $t = t_0$ равен $\rho(t_0)$. Функция $\rho(t)$ *непрерывна на интервале* $\mathbf{I}$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Наличие внешней операции на растране позволяет традиционно определить производную функции $\rho(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \Delta\rho.$$

Приращение $\Delta\rho$ функции $\rho(t)$ вычисляется из равенства $\rho(t + \Delta t) = \rho(t) + \Delta\rho$, откуда

$$\Delta\rho = -\rho(t) + \rho(t + \Delta t).$$

Ввиду некоммутативности внутренней операции на $\mathbf{V}$-растране слагаемые в правой части последнего равенства неперестановочны. С использованием противоположного раста, см. (3), для раста $\rho(t)=\left(x(t),\, x^1(t),\, x^2(t)\right)$ имеем $\rho(t)=\left(-x(t),\,-x^1(t),\,-x^2(t)e^{-x(t)}\right)$. Находим:

$$\Delta\rho=-\rho(t)+\rho(t+h)=$$

$$=\left(x^1(t+h)-x^1(t),\, x^2(t+h)-x^2(t),\, -x(t)e^{-x^1(t)}e^{x^1(t+h)}+x(t+h)\right).$$

Введем обозначения:

$$x(t+h)-x(t)=\Delta x,\ x^1(t+h)-x^1(t)=\Delta x^1,\ x^2(t+h)-x^2(t)=\Delta x^2,\ h=\Delta t.$$

В этих обозначениях приращение растранной функции таково:

$$\Delta\rho=\left(\Delta x,\, \Delta x^1,\, x^2(t+h)-x^2(t)e^{\Delta x}\right).$$

Умножим раст $\Delta\rho$ на число $\frac{1}{h}$, см (2):

$$\frac{\Delta\rho}{h}=\left(\frac{\Delta x}{h},\frac{\Delta x^1}{h},\left(x^2(t+h)-x^2(t)e^{\Delta x}\right)\frac{e^{\frac{\Delta x}{h}}-1}{\left(e^{\Delta x}-1\right)}\right). \tag{4}$$

Вычислим $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta\rho}{h}$. Согласно определению предела растранной функции в начале настоящего п. 1.4 указанный предел вычисляется покомпонентно. Для первых двух компонент в (4) получаем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{h}=x',\ \lim_{h\to 0}\frac{\Delta x^1}{h}=x'^1.$$

Предел в третьей компоненте раста (4) имеет вид

$$\lim_{h\to 0}\left(\left(x^2(t+h)-x^2(t)e^{\Delta x}\right)\frac{e^{\frac{\Delta x}{h}}-1}{\left(e^{\Delta x}-1\right)}\right)=\left(e^{x'}-1\right)\lim_{h\to 0}\frac{x^2(t+h)-x^2(t)e^{\Delta x}}{\left(e^{\Delta x}-1\right)}.$$

Применим правило Лопиталя:

$$\left(e^{x'}-1\right)\lim_{h\to 0}\frac{\left(x'^2(t+h)-x^2(t)x'(t+h)e^{\Delta x}-x'(t)e^{\Delta x}\right)}{x'^1(t+h)e^{\Delta x^1}}=\left(e^{x'}-1\right)\left(\frac{x'^2(t)}{x'(t)}-x^2(t)\right).$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления производной растранной функции:

$$\rho'(t)=\left(x'(t),\, x'^1(t),\, \left(e^{x'}-1\right)\left(\frac{x'^2(t)}{x'(t)}-x^2(t)\right)\right). \tag{5}$$

В частности, если $x^1(t)=C$ – постоянная величина, то

$$\rho'(t)=\left(0, x'^1(t), x'^2(t)\right); \tag{6}$$

если $x^1(t)=t$, то формула производной принимает вид

$$\rho'(t)=\left(1, x'^1(t), (e-1)\left(x'^2(t)-x^2(t)\right)\right). \tag{7}$$

Согласно (6) производная второго порядка $\rho''(t)=(\rho'(t))'$ в случае $x(t)=t$ является евклидовой векторной функцией и далее дифференцируется как евклидова векторная функция.

2 Пространство с $\mathbf{V}$-растраном

2.1 ВО-*пространство*

Пусть $(\Omega,+)$ – группа Ли. Структура $\Omega=(\Omega,+,\omega_R(+))$ с внутренней бинарной операцией (+) и внешней операцией $\omega_R(+)$ умножения элементов группы Ли на действительное число называется *одулем Ли*. При этом для любых $\omega\in\Omega$, $t,s\in\mathbf{R}$ требуется выполнение следующих аксиом:

$$s(t\omega)=(st)\omega,\ (s+t)\omega=(s+t)\omega,\ 0\omega=\vartheta,\ 1\omega=\omega.$$

Растран является частным случаем одуля Ли. Элементы одуля называются *одулярами.* Рассмотрим непустое множество $\mathbf{W}$, его элементы называются точками и обозначаются: A, B, …, M, … Задано отображение

$$\mathbf{W}\times\mathbf{W}\to\mathbf{\Omega}$$

пар точек в одуль Ли $\mathbf{\Omega}$, т.е. всякой паре (A,B) точек соответствует единственный одуляр ω, пишем $AB=\omega$. Считаем, что для рассматриваемого отображения выполняются аксиомы Г. Вейля:

1. *Для всякой точки* A *и всякого одуляра* ω *существует единственная точка* B*, что* $AB=\omega$.
2. *Для любых трех точек* A,B,C*, если* $AB=\omega$, $BC=\mu$, *то* $AC=\omega+\mu$.

Множество $\mathbf{W}$ называется *вейлевским одулярным пространством*, или коротко **ВО**-*пространством.* Для любых трех точек A,B,C выполняются соотношения

$$AB+BC=AC;\ \text{если}\ AB=\omega,\ \text{то}\ BA=-\omega;\ AA=\vartheta.$$

2.2 ЕМ-*пространства*

ВО-пространство с нормированным растраном называется **ЕМ**-*пространством* и обозначается $\mathbf{M^3}$. **ЕМ**-пространство с $\mathbf{V}$-растраном $\mathbf{P_v^3}$ называется **VЕМ**-пространством и обозначается $\mathbf{M_v^3}$. Репер $B=(O,\alpha,\beta,\gamma)$ **ЕМ**-пространства является ортонормированным. Для точек $A(a,a^1,a^2)$ и

$B(b,b^1,b^2)$ раст AB находится из соотношения $OA+AB=OB$: $AB=-OA+OB$. По формулам (3) и (2) находим

$$AB=(b-a,b^1-a^1,b^2-a^2e^{b-a}).$$

Расстояние $|AB|$ между точками $A(a,a^1,a^2)$ и $B(b,b^1,b^2)$, как во всяком **BO**-пространстве с галилеевой метрикой, равно норме раста AB:

$$|AB|=\begin{cases}|b-a|, \text{если } b\neq a,\\ \sqrt{\left(b^1-a^1\right)^2+\left(b^2-a^2\right)^2}, \text{если } b=a.\end{cases}$$

При $b=a$ расстояние между точками A и B является евклидовым.

3 Свойства кривых VEM-пространства

3.1 Кривые в EM *-пространстве*

Пусть $\mathbf{I}$ – интервал в $\mathbf{R}$. *Дифференцируемой кривой* класса $\mathbf{C^k}$ в **VEM**-пространстве $\mathbf{M}_\nu^3$ называется дифференцируемое отображение ρ класса $\mathbf{C^k}$ интервала $\mathbf{I}$ в $\mathbf{M}_\nu^3$. Значению параметра t из интервала $\mathbf{I}$ соответствует точка $\rho=\rho(t)$ в **VEM**-пространстве. В ортонормированном репере $B=(O,\alpha,\beta,\gamma)$ пространства $\mathbf{M}_\nu^3$ положим $\rho(t)=\left(x(t),x^1(t),x^2(t)\right)$. Параметр t пробегает интервал $\mathbf{I}=(a,b)$ в $\mathbf{R}$, возможно, $\mathbf{I}$ совпадает с $\mathbf{R}$. Кривая описывается растранной функцией $\rho(t)$. Принято говорить, что

$$\rho=\rho(t)=\left(x(t),x^1(t),x^2(t)\right), t\in I,$$

есть кривая в **VEM**-пространстве $\mathbf{M}_\nu^3$. Вместе с тем кривая $\rho(t)$ является множеством точек $l=\{OM\mid OM=\rho(t),t\in I\}$. Поэтому говорят, что задана кривая l или кривая $\rho(t)$. Кривая $\rho(t)$ называется регулярной класса $\mathbf{C^k}$ на интервале $\mathbf{I}$, если отображение ρ имеет класс $\mathbf{C^k}$ и в каждой точке $t\in\mathbf{I}$, $\rho'(t)\neq\vartheta$. Рассматриваем регулярные кривые с условием $x\neq 0$. Функция $x=x(t)$ является обратной, $t=t(x)$, параметр x пробегает некоторый интервал $\mathbf{I_1}$ в $\mathbf{R}$. Обозначая $x=s$, имеем кривую l в параметризации

$$\rho(s)=(s,x(s),y(s)), s\in I. \tag{8}$$

Полученная параметризация обладает следующими свойствами: во-первых,

$$\rho'(s)=\left(1,x'(s),(e-1)\left(y'(s)-y(s)\right)\right),$$

см. (7) , и по определению нормы растов в п. 1.3,

$$\left\|\rho'(s)\right\|=1.$$

Во-вторых, если $P=\rho(s_0)$ и $M=M(s)$, $s\neq s_0$, – две точки кривой l, то (согласно п. 2.2) $PM=\left(s-s_0, x(s)-x(s_0), y(s)-y(s_0)e^{s-s_0}\right)$ и

$$|PM|=|s-s_0|.$$

Это означает, что параметризация (8) кривой l является естественной. Производные функции (8) обозначаем $\dot\rho, \ddot\rho \ldots$ Точке $\rho(t)$ кривой сопоставляется раст $\rho'(t)$ при том же значении $t\in \mathbf{I}$. Имеем касательное отображение **VEM**-пространства в растран. Прямая $\left\langle M(t_0), \dot\rho(t_0)\right\rangle$ называется касательной к кривой $\rho(t)$ в точке t_0 этой кривой.

Пусть $\rho(t)=(u(t), v(t), w(t))$ – произвольная параметризация кривой l. В каждой точке P кривой l имеем касательные: $\left\langle P, \rho'(t)\right\rangle$ и $\left\langle P, \dot\rho(s)\right\rangle$. Находим производные растранных функций, считая $s=s(t)$:

$$\rho'(t)=\left(u'(t), v'_s s'_t, \left(e^{u'(t)}-1\right)\left(\frac{w'_s s'_t}{s'_t}-w(s)\right)\right)=$$

$$=\left(u'(t), v'_s s'_t, \left(e^{u'(t)}-1\right)\left(w'_s-w\right)\right);$$

$$\dot\rho(s)=\left(1, \dot x, (e-1)(-y+\dot y)\right)=\left(1, v'_s, (e-1)\left(w'_s-w\right)\right).$$

Вычислим произведение $u'(t)\cdot\dot\rho(s)$:

$$u'(t)\dot\rho(s)=\left(u'(t), u'(t)\cdot v'_s, (e-1)\left(w'_s-w\right)\frac{\left(e^{u'(t)}-1\right)}{\left(e^1-1\right)}\right)=$$

$$=\left(u'(t), v'_s s'_t, \left(e^{u'(t)}-1\right)\left(w'_s-w\right)\right)=\rho'(t).$$

Выполняется равенство $\rho'(t)=\rho'(t(s))=u'(t)\cdot\dot\rho(s)$, значит, положение касательной к кривой l, т.е. первой соприкасающейся плоскости кривой в **VEM**-пространстве, не зависит от параметризации кривой l.

Подпространство (P, ρ', ρ'') в **VEM**-пространстве 2-мерно, т.е. существует вторая соприкасающаяся плоскость кривой l. Для раста $\rho''(t)$ получаем

$$\ddot\rho(t)=\left(u'(t), v'_s s'_t, \left(e^{u'(t)}-1\right)\left(w'_s-w\right)\right)'=\left(u''(t), v''_{ss}s'_t+v'_s s''_{tt}, \left(e^{u''(t)}-1\right)\times\right.$$

$$\times\left(-\left(e^{u'(t)}-1\right)\left(w'_s-w(s)\right)+e^{u'(t)}\left(w''(t)-w(s)\right)+\frac{\left(e^{u'(t)}-1\right)\left(w''_{ss}-w'_s\right)}{u''(t)}\right)\Bigg);$$

$$\rho''\neq u''\cdot\dot{\rho}+A\cdot\ddot{\rho},$$

где A – некоторый коэффициент.

Таким образом, положение второй соприкасающейся плоскости кривой l зависит от ее параметризации. Для сравнения заметим, что в **BO**-пространстве с однородным растраном положение первой и второй соприкасающихся плоскостей кривой не зависит от параметризации кривой.

3.2 Кривизна кривой

Рассмотрим кривую $\rho(s)=(s,x(s),y(s))$ в естественной параметризации. Функцию $\rho(s)$ можно записать в разложении по базису

$$\rho(s)=s\alpha+x(s)\beta+y(s)\gamma.$$

Раст $x(s)\beta+y(s)\gamma$ является трансляцией, множество всех трансляций **V**-растрана составляет векторное пространство $V^2=\langle\beta,\gamma\rangle$ в $\mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\mathbf{3}}$. Поэтому имеем векторную функцию $x(s)\beta+y(s)\gamma$, которую обозначим $\vec{r}(s)$. Получаем разложение раста $\rho(s)$ на времениподобную и пространственноподобную составляющие:

$$\rho(s)=s\alpha+\vec{r}(s).$$

Для кривой (8) **VEM**-пространства в естественной параметризации по (7) и (6) во всякой ее точке имеем производные расты:

$$\tau=\dot{\rho}(s)=\left(1,\dot{x},(e-1)(\dot{y}-y)\right),\ \dot{\tau}=\ddot{\rho}(s)=\left(0,\ddot{x},(e-1)(\ddot{y}-\dot{y})\right).$$

По определению нормы раста в п. 1.3 раст τ касательной к кривой (8) является единичным:

$$\|\tau\|=\|\dot{\rho}\|=1.$$

Раст $\dot{\tau}=\ddot{\rho}$ является трансляцией, т.е. вектором из $V^2=\langle\beta,\gamma\rangle$. По определению скалярного произведения растов в п. 1.3, $\dot{\rho}\ddot{\rho}=0$, поэтому $\dot{\rho}\perp\ddot{\rho}$. В точке P раст $\dot{\tau}=\ddot{\rho}(s)$ определяет главную нормаль $(P,\dot{\tau})$ кривой (8). Обозначим

$$\dot{\tau}=k_1\vec{n},\|\vec{n}\|=1. \tag{9}$$

Таким образом, $\|\dot{\tau}\|=\|\ddot{\rho}\|=k_1$. По определению нормы растов в п. 1.3 имеем

$$|\ddot{\rho}|=\sqrt{\ddot{x}^2+(e-1)^2(\ddot{y}-\dot{y})^2}=k_1. \tag{10}$$

Величина k_1 называется *кривизной* линии $\rho(s)$ в точке P (по аналогии с кривизной евклидовой и галилеевой кривой [1]). Функция $k_1 = k_1(s)$ называется функцией кривизны линии $\rho(s)$ (8). Трансляция

$$\vec{n} = \frac{1}{k_1}\left(0, \ddot{x}, (e-1)(\ddot{y} - \dot{y})\right)$$

называется единичной трансляцией главной нормали кривой $\rho(s)$ в точке P.

3.3 Кручение кривой

В работе [1, с. 59–60] для евклидова вектора $\vec{u}(t) = (v(t), w(t))$ введена κ-функция следующим образом: для производной $\vec{u}'(t)$ выполняется

$$\vec{u}'(t) = \frac{vw' - v'w}{\|\vec{u}\|^2}\left(-\frac{w}{\|\vec{u}\|}, \frac{v}{\|\vec{u}\|}\right).$$

Вектор $g(t) = \left(-\frac{w}{\|\vec{u}\|}, \frac{v}{\|\vec{u}\|}\right)$ является единичным, обозначим

$$\vec{u}(t) = \kappa(t)\vec{g}(t).$$

Функция $\kappa(t) = \kappa(\vec{u}) = \frac{vw' - v'w}{\|\vec{u}\|^2}$ называется κ-функцией евклидова вектора $\vec{u}(t)$. *Кручением* кривой (8) $\rho(s)$ называется κ-функция вектора $\ddot{\rho}(t)$:

$$k_2(t) = (e-1)\frac{\ddot{x}(\dddot{y} - \ddot{y}) - \dddot{x}(\ddot{y} - \dot{y})}{k_1^2}; \tag{11}$$

$k_2(t)$ называется функцией *кручения* линии (8).

3.4 Формулы Френе

Выше найден вектор $\dot{\tau}$, формула (9) – это первая формула Френе для кривой **VEM**-пространства $\mathbf{M}_v^3$. Вычисляя κ-функцию вектора $\ddot{\rho}$, получаем

$$\dot{\vec{n}} = \frac{\dddot{\rho}}{k_1} = k_2\vec{b}, \left\|\vec{b}\right\| = 1, \vec{b} \perp \vec{n}. \tag{12}$$

Это вторая формула Френе. И точно так же находим

$$\dot{\vec{b}} = -k_2\vec{n}, \tag{13}$$

это третья формула Френе.

Формулы (9) , (12), (13) являются формулами Френе:

$$\dot{\tau} = k_1\vec{n}, \dot{\vec{n}} = k_2\vec{b}, \dot{\vec{b}} = -k_2\vec{n}.$$

В каждой точке P кривой (8) определены векторы $\tau, \vec{n}, \vec{b}$; τ есть единичный вектор касательной кривой $\rho(s)$; $\vec{n}$ – единичный вектор главной нормали кривой $\rho(s)$ и $\vec{b}$ – единичный вектор бинормали кривой $\rho(s)$. Репер $(P, \tau, \vec{n}, \vec{b})$ сопровождает точку в движении по кривой (8).

3.5 Уплощение кривой

Если кривая (8) плоская, то ее кручение $k_2 = 0$, вектор бинормали $\vec{b}$ кривой остается постоянным. Если же кручение кривой $k_2 = 0$, то вектор бинормали $\vec{b}$ кривой постоянен и кривая лежит в плоскости.

3.6 Натуральные уравнения кривой **VEM**-пространства

По формулам (10) и (11) запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}^2 + (e-1)^2 (\ddot{y} - \dot{y}) = k_1^2(t), \\ (e-1)\left(\dot{x}(\dddot{y} - \ddot{y}) - \dddot{x}(\ddot{y} - \dot{y})\right) = k_1^2(t) k_2(t). \end{cases} \tag{14}$$

Считая функции $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$ заданными, найдем функции $x(t), y(t)$ – компоненты растранной функции $\rho(t) = (t, x(t), y(t)), t \in I \subseteq R$, описывающей кривую **VEM**-пространства. Находим функции $x(t)$ и $y(t)$ как решение системы (14). Обозначим

$$\ddot{x} = u(t),\ (e-1)(\ddot{y} - \dot{y}) = v(t). \tag{15}$$

Система уравнений (14) запишется в виде

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = k_1^2(t), \\ u \cdot \dot{v} - v \cdot \dot{u} = k_1^2(t) \cdot k_2(t). \end{cases}$$

По виду первого уравнения системы положим

$$u = k_1 \cos w, v = k_1 \sin w, \tag{16}$$

где

$$w = w(t) = \int k_2(t) dt. \tag{17}$$

Удостоверимся, что функции (15) удовлетворяют второму уравнению системы (14). Действительно,

$$\dot{u} = \dot{k}_1 \cos w - k_1 k_2 \sin w,\ \dot{v} = \dot{k}_1 \sin w + k_1 k_2 \cos w,\ u\dot{v} - \dot{u}v = k_1^2 k_2.$$

Подставляя (16) в (15), предварительно проинтегрировав (17), и решая уравнения (15), получаем компоненты $x(t), y(t)$ функции $\rho(t) = (t, x(t), y(t))$, т.е. кривую **VEM**-пространства, кривизна и кручение которой совпадают с заданными функциями $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$. Начальные условия

$$t = t_0, (x(t_0), y(t_0)) = (a,b) = P, \ (1, \dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) = (1,c,d) = \tau$$

определяют единственную кривую **VEM**-пространства, проходящую через точку P в направлении раста касательной τ.

В частности, пусть кривизна k_1 и кручение k_2 кривой $\rho(t)$ постоянны. По (17) находим

$$w = k_2 \cdot t + c_0.$$

Воспользовавшись (16) и (17), вычислим $x(t)$:

$$\ddot{x} = k_1 \cos(k_2 t + c_0), \ \dot{x} = \frac{k_1}{k_2} \sin(k_2 t + c_0) + c_1;$$

$$x = -\frac{k_1}{k_2} \cos(k_2 t + c_0) + c_1 t + c_2. \tag{18}$$

Для отыскания функции $y(t)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y} - \dot{y} = \frac{k_1 k_2 \sin(k_2 t + c_0)}{(e-1)},$$

введем обозначение

$$\dot{y} = p.$$

В уравнении

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k_1 \sin(k_2 t + c_0)}{e-1} + p$$

положим $p = c(t)e^t$, где $c(t)$ – неизвестная функция,

$$\dot{p} = e^t c(t) + e^t c'(t), \ e^t c(t) + c'(t) e^t = \frac{k_1 \sin(k_2 t + c_0)}{e-1} + c(t) e^t,$$

значит,

$$c(t) = \frac{k_1}{e-1} \int \frac{\sin(k_2 t + c_0)}{e^t} dt;$$

$$c(t) = \frac{k_1}{e-1} \cdot (-e^{-t}) \left(\frac{\sin(k_2 t + c_0) + k_2 \cos(k_2 t + c_0)}{1 - k_2^2} \right) + c_3,$$

и теперь

$$p = \frac{k_1}{e-1} \cdot \left(\frac{\sin(k_2 t + c_0) + k_2 \cos(k_2 t + c_0)}{1 - k_2^2} \right) + c_3;$$

$$y = \frac{k_1}{(e-1)(k_2^2 - 1)} \cdot \left(\frac{-\cos(k_2 t + c_0)}{k_2} + \sin(k_2 t + c_0) + c_3 t + c_4 \right). \tag{19}$$

Указанные выше начальные условия выделяют единственную кривую, проходящую через данную точку $\rho(t_0)$ в направлении вектора $\rho'(t_0) = (1, x(t_0), y(t_0))$. Таким образом, по кривизне k_1 и кручению k_2 кривой $\rho(t)$ получаем задание кривой растранной функцией $\rho(t) = (t, x(t), y(t))$, $t \in I \subseteq R$, где $x(t)$ и $y(t)$ – функции (18) и (19).

Список литературы

1. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств : монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2005. – 306 с.
2. **Сабинин, Л. В.** Одули как новый подход к геометрии со связностью / Л. В. Сабинин // ДАН СССР. – 1977. – № 5. – С. 800–803.
3. **Валовик, Д. В.** Кривые в одулярной дифференциальной геометрии пространства с растраном общего вида / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 2. – С. 10–18.

Долгарев Артур Иванович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: delivar@yandex.ru

Dolgarev Artur Ivanovich
Candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

Рябова Екатерина Ивановна
студент, Пензенский государственный университет

E-mail: delivar@yandex.ru

Ryabova Ekaterina Ivanovna
Student, Penza State University

УДК 514.126

Долгарев, А. И.

Кривые в галилеевом пространстве с 3-мерным V-растраном / А. И. Долгарев, Е. И. Рябова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3 (11). – С. 22–34.